



Федеральное агентство по образованию
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:
Декан факультета АВТ
С.А. Гайворонский

«___» _____

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ – 2

Рабочая программа для интегрированных образовательных программ
«Автоматизация и управление» и
«Информатика и вычислительная техника»

Факультет **автоматики и вычислительной техники** (АВТФ) .
Обеспечивающая кафедра Высшая математика

Курс I
Семестр II
Учебный план набора 2005 года с изменениями _____ года

Распределение учебного времени

Лекции	51_часов (ауд.)
Практические (семинарские) занятия	<u>51</u> часов (ауд.)
Всего аудиторных занятий	<u>102</u> часов
Самостоятельная (внеаудиторная) работа	<u>102</u> часов
Общая трудоемкость	<u>204</u> часа
Зачет во <u>II</u> семестре	
Экзамен во <u>II</u> семестре	

2005



Аннотация

Рабочая программа по дисциплине «Математический анализ-2» предназначена для подготовки специалистов на факультете автоматике и вычислительной техники по направлениям 552800 – информатика и вычислительная техника, 654700 – информационные системы, 550200 – автоматизация и управление, 657900 – автоматизированные технологии и производства. Программа составлена на основе государственного образовательного стандарта направлений 550200, 552800, 654700 и 657900 профессиональной образовательной программы ТПУ по этим направлениям. Структура, содержание и оформление программы соответствуют стандарту ТПУ.

В рабочей программе приведены:

1. содержание теоретического раздела дисциплины (темы и порядок изучения теоретического материала);
2. содержание практического раздела дисциплины;
3. программа самостоятельной познавательной деятельности студентов (темы и порядок выполнения индивидуальных заданий, контрольных работ, самостоятельной работы);

Разработчик программы:

Подскребко Э. Н. – доцент каф. ВМ ЕНМФ ТПУ

Имас О. Н. – доцент каф. ВМ ЕНМФ ТПУ.

Бер Л. М. – доцент каф. ВМ ЕНМФ ТПУ.



Предисловие

1. Рабочая программа составлена на основе ГОС ВПО по направлениям
552800 – информатика и вычислительная техника
(код и наименование)
654700 – информационные системы
(код и наименование)
550200 – автоматизация и управление
(код и наименование)
657900 – автоматизированные технологии и производства
(код и наименование)
утвержденного Госкомвузом РФ в 2000 г.
а также образовательного стандарта ТПУ,
утвержденного УМУ ТПУ в 2001 году
(обозначение или наименование другого документа университетского
уровня по направлению, специальности, специализации)

РАССМОТРЕНА и ОДОБРЕНА на заседании обеспечивающей
кафедры высшей математики протокол № _____
(наименование кафедры) (дата)

2 Разработчики

<u>доцент</u> (должность)	<u>ВМ</u> (кафедра)	_____	<u>Подскребко Э.Н.</u> (И.О.Фамилия)
<u>доцент</u> (должность)	<u>ВМ</u> (кафедра)	_____	<u>Имас О.Н.</u> (И.О.Фамилия)
<u>доцент</u> (должность)	<u>ВМ</u> (кафедра)	_____	<u>Бер Л.М.</u> (И.О.Фамилия)

3 Зав. обеспечивающей кафедрой ВМ _____ К.П. Арефьев
(подпись) (И.О.Фамилия)

4 Рабочая программа СОГЛАСОВАНА с факультетом, выпускающими
кафедрами специальности; СООТВЕТСТВУЕТ действующему учеб-
ному плану.

Зав. выпускающей кафедрой

каф. ИКСУ	_____	А.М. Малышенко
каф. АиКС	_____	Г.П. Цапко
каф. ВТ	_____	Н.Г. Марков
каф. ИПС	_____	В.К. Погребной
каф. ОСУ	_____	В.А.Силич



1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цели дисциплины

Целью преподавания дисциплины «Математический анализ – 2» является:

- развитие математической интуиции, воспитание математической культуры;
- овладение логическими основами курса, необходимых для решения теоретических и практических задач;
- формирование навыков самостоятельной работы, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности.

1.2. Целевые установки дисциплины

Изучающий курс «Математический анализ–2» должен

- иметь представление:
 - ◆ о месте и роли математики в современном мире;
 - ◆ о математическом мышлении, принципах математических рассуждений и математических доказательств;
 - ◆ о приложениях изучаемого материала в других разделах математики;
 - ◆ о численных методах математики;
- знать и понимать
 - ◆ взаимосвязь разделов курса.

1.3. Задачи изложения и изучения дисциплины

Изучающий курс «Математический анализ – 2» должен

- знать и уметь использовать:
 - ◆ основные понятия математического анализа (интеграл, дифференциальное уравнение, числовой, функциональный ряд);
 - ◆ уметь применять методы математического анализа к отысканию физических и геометрических характеристик процессов;
 - ◆ уметь устанавливать границы применимости методов; уметь проверять решения;
- иметь опыт:
 - ◆ употребления математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов;
 - ◆ исследования, аналитического и численного решения задач математического анализа.



ОБЩИЙ ОБЪЕМ ЗАНЯТИЙ ПО СЕМЕСТРАМ

Таблица 1

Семестр	Лекции	Практич. занятия	Самост. работа	Всего часов	Форма отчетности
II	51	51	102	204	Зачет Экзамен

Весь курс разбит на разделы, названия и порядковые номера которых указаны в таблице 2.

ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА–2

Таблица 2

№	Название раздела	Число часов			
		лекций	практ. занятия	самост. работа	всего
1	Определенный интеграл	0	8	16	24
2	Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных. Кратные интегралы.	18	14	34	66
4	Дифференциальные уравнения	16	16	30	62
5	Числовые и функциональные ряды	16	14	22	52
Итого за семестр		50	52	102	204



2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1.

Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных (18 ч.)

Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность. Свойства пределов, повторные пределы. Частные производные. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Дифференцируемость функции нескольких переменных. Дифференциал, его геометрический смысл. Свойства дифференцируемых функций. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции.

Дифференцирование сложной функции. Производная по направлению и градиент.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Экстремум, наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных.

Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла. Определение двойного интеграла. Достаточные условия интегрируемости. Свойства кратных интегралов. Сведение к повторному интегралу.

Криволинейные координаты, якобиан перехода, замена переменных в кратных интегралах.

Тройной интеграл. Вычисление тройного интеграла в декартовой, цилиндрической и сферической системе координат.

Раздел 2

Обыкновенные дифференциальные уравнения (16 ч.)

Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений. Задача Коши.

Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, Однородные уравнения и приводящиеся к ним. Линейные уравнения, уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия, задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Свойства линейного дифференциального оператора. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Определитель Вронского.



Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) высших порядков. Свойства решений. Теорема об общем решении ЛОДУ. ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ). Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Структура общего решения ЛНДУ. ЛНДУ с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения ЛНДУ по виду правой части уравнения.

Раздел 3

Числовые и функциональные ряды (16 ч.)

Числовые ряды: основные определения и свойства. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд.

Знакоположительные ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный.

Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка ряда.

Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся числовых рядов.

Функциональные последовательности и ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Степенные ряды. Свойства степенных рядов. Теорема Абеля.

Ряд Тейлора. Разложения элементарных функций в степенные ряды. Применения степенных рядов.

Ряды Фурье по ортогональным системам. Минимальное свойство частных сумм рядов Фурье, критерии сходимости. Пространство функций со скалярным произведением.

Сходимость тригонометрических рядов. Тригонометрические ряды Фурье. Комплексная форма ряда Фурье.

Понятие интеграла Фурье, повторный интеграл Фурье. Косинус- и синус-преобразования Фурье. Формула обращения. Свойства преобразования Фурье.



3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1

Определенный интеграл (8 ч.)

1. Нахождение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница, замена переменных в определенном интеграле.
2. Приложения определенного интеграла.
3. Несобственные интегралы.
4. Контрольная работа (определенный интеграл).

Раздел 2

Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных (14 ч.)

1. Понятие функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность. Частные производные.
2. Дифференциал. Дифференцирование сложной и неявной функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению и градиент.
3. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
4. Экстремумы функций нескольких переменных.
5. Двойные интегралы в декартовой системе координат и их приложения в геометрии и механике. Двойные интегралы в полярной системе координат.
6. Тройные интегралы в декартовой системе координат. Тройные интегралы в цилиндрических и сферических координатах.
7. Контрольная работа по теме «Функции нескольких переменных».

Раздел 3

Обыкновенные дифференциальные уравнения (16 ч.)

1. Комплексные числа и действия над ними.
2. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.
3. Линейные уравнения первого порядка, уравнения Бернулли.
4. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Самостоятельная работа «ДУ первого порядка».
5. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.



6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами. Метод вариации.
7. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
8. Контрольная работа «дифференциальные уравнения».

Раздел 4

Числовые и функциональные ряды (14 ч.)

1. Основные понятия числовых рядов. Исследование сходимости знакоположительных рядов с помощью признаков сравнения, Даламбера, Коши, интегрального.
2. Знакопередающиеся ряды.
3. Функциональные ряды и степенные ряды.
4. Ряд Тейлора и Маклорена. Их приложения.
5. Ряд Фурье.
6. Интеграл Фурье.
7. Контрольная работа на тему «Ряды».



4. ПРОГРАММА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов предполагает:

1. проработку лекционного материала;
2. изучение нового теоретического материала по учебнику и составление конспекта;
3. выполнение текущих практических заданий по сборникам задач;
4. выполнение индивидуальных заданий (типовых расчетов).

Индивидуальные задания для студентов могут быть предложены либо из фонда индивидуальных заданий, составленных преподавателями кафедры ВМ, либо из рекомендованных сборников задач.

Во втором семестре студенты выполняют индивидуальные задания по темам:

- «определенный интеграл» (варианты заданий прилагаются).
- «дифференцирование и интегрирование функции нескольких переменных»
- «Дифференциальные уравнения»
- «Ряды»



5. ТЕКУЩИЙ И ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

Текущий и итоговый контроль представлен в следующих формах:

1. Студенты выполняют четыре контрольные работы по темам:
 - определенный интеграл
 - функция нескольких переменных
 - дифференциальные уравнения
 - ряды
2. В конце второго семестра студенты сдают экзамен по курсу математического анализа – 2.



6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1; Т. 2. – М.: Наука, 1985.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высш. школа, 1983.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1971.
5. Щипачев В.С. Основы высшей математики. М.: Высш. школа, 1983.
6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высш. школа, 1994.
7. Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Пахомова Е.Г. ИДЗ по дифференциальным уравнениям.

Дополнительная литература.

1. Арефьев К.П., Нагорнова А.И., Столярова Г.П., Харлова А.Н. Высшая математика (часть I). Учебное пособие - Томск: изд-во ТПУ, 1999.
2. Кошельская Г.А., Нагорнова А.И., Некряч Е.Н. Высшая математика (часть II). Дифференцирование. Учебное пособие - Томск: изд-во ТПУ, 1998.
3. Арефьев К.П., Нагорнова А.И., Столярова Г.П. Высшая математика (часть III). Интегрирование. Учебное пособие - Томск: изд-во ТПУ, 1999.
4. Кошельская Г.А., Столярова Г.П., Харлова А.Н. Высшая математика (часть IV). Ряды. Учебное пособие - Томск: изд-во ТПУ, 2001.
5. Приближенные методы вычисления определенных интегралов (методические указания).
6. Приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка (методические указания).
7. Н.Ф. Пестова. Электронное учебное пособие «Введение в математический анализ», Томск, ТПУ, 1999.
8. Г. А. Кошельская. Функции нескольких переменных. Методические указания и контрольные задания по высшей математике. - Томск: изд-во ТПУ, 1985.
9. Р. П. Дячук. Предел и непрерывность. Методические указания и контрольные задания по высшей математике. - Томск: изд-во ТПУ, 1980.



Приложение 1

ЗАДАНИЯ РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ

Контрольная работа по теме «определенный интегралы»

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить интегралы

a) $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$

b) $\int_{\pi/2}^{2 \arctg 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}$

c) $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx$

d) $\int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx$

2. Вычислить площадь фигур, ограниченных кривыми

a) $y = (x-2)^3, y = 4x-8$

b) $r = 4 \cos 3\varphi, r = 2 (r \geq 2)$

3. Вычислить длину дуги кривой

a) $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$

b) $\begin{cases} x = 5 \cdot (t - \sin t) \\ y = 5 \cdot (1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$

4. Вычислить несобственные интегралы или исследовать на сходимость

a) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

b) $\int_0^3 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить интегралы

a) $\int_0^1 \frac{(x^2 + 1)}{(x^3 + 3x + 1)^2} dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 - \cos x}$

c) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx$

d) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$



2. Вычислить площадь фигур, ограниченных кривыми

a) $y = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$

b) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cdot \cos t \\ y = 2\sqrt{2} \cdot \sin t, \quad y = 2 (y \geq 2) \end{cases}$

3. Вычислить длину дуги кривой

a) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \leq x \leq 2$

b) $\begin{cases} x = 3 \cdot (2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3 \cdot (2 \sin t - \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

4. Вычислить несобственные интегралы или исследовать на сходимость

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$

b) $\int_3^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$

Контрольная работа по теме «Функции нескольких переменных»

ВАРИАНТ 1

1. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy + 9}}{xy}$.

2. Доказать по определению дифференцируемость функции $z = 2 - xy + x^2$ всюду на \mathbb{R}^2 . Найти ее дифференциал и вычислить приближенно $z(2,01; 1,02)$. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, определенной заданной функцией, в точке $M_0(2; 1)$.

3. Найти все частные производные до второго порядка включительно функции $z = f(x, y)$, если $x = u + 2v$, $y = u^2 + v^2$.

4. Исследовать функцию $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ на экстремум.

5. Найти пределы двукратного интеграла для $\iint_D f(x, y) dx dy$, где об-

ласть D ограничена линиями $y = \frac{1}{3}x$, $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$.



6. Упростить, изменив порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

7. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a > 0, \quad b > 0).$$

8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $(x - 0,5R)^2 + y^2 = 0,25R^2$.

ВАРИАНТ 2

1. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{1+x^2y^2} - 1}{x^2 + y^2}$.

2. Доказать по определению дифференцируемость функции $z = x^2 + y^2 + 2x$ всюду на \mathbb{R}^2 . Найти ее дифференциал и вычислить приближенно $z(1,01; 1,02)$. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, определенной заданной функцией, в точке $M_0(1; 2)$.

3. Найти все частные производные до второго порядка включительно функции $z = f(x,y)$, если $x = u - v$, $y = u^2 + v^2$.

4. Исследовать функцию $z = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ на экстремум.

5. Найти пределы двукратного интеграла для $\iint_D f(x,y)dx dy$, где об-

ласть D ограничена линиями $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$.

6. Упростить, изменив порядок интегрирования

$$\int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_2^4 dx \int_{2x-4}^x f(x,y)dy$$

7. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y = a$, $y = \frac{a}{2}$ ($a > 0$, $x \geq 0$, $y \geq \frac{a}{2}$).

8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $1 - z = x^2 + y^2$, $1 + z = x^2 + y^2$.



*Контрольная работа по теме
«Дифференциальные уравнения»*

ВАРИАНТ 1

Найти общее решение уравнений

1. $y' = e^{2x+3y}$

2. $xyy' = x^2 + y^2$

3. $(x+1)y' - 2y = e^x(x+1)^3$

4. $3y^2y' + y^3 = x + 1$

5. $(2x + ye^{-xy})dx + (1 + xe^{-xy})dy = 0$

6. $(y')^4 - 3(y')^2 + y' - 6 = 0$

7. $2y(y')^3 + y'' = 0$

8. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$

9. $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$

ВАРИАНТ 2

Найти общее решение уравнений

1. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$

2. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$

3. $y'x + y = (x+1)^2$

4. $2xy' - 3y + (2x - 7)y^3 = 0$

5. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

6. $y = xy' + 3(y')^2$

7. $xy'' = y' + x^2$

8. $y'' + 5y' + 6y = (4x - 5)e^x$

9. $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$

Контрольная работа по теме «Ряды»

ВАРИАНТ 1

1. Записать общий член ряда $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$

2. Исследовать ряд на сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-2)^{2n}}{n}$.



4. Разложит функцию $y = \cos^2 x$ в ряд Маклорена.

5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг. Указать значения суммы ряда в точках разрыва.

ВАРИАНТ 2

1. Записать общий член ряда $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$

2. Исследовать ряд на сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}.$

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}.$

4. Разложит функцию $y = \sin^2 x$ в ряд Маклорена.

5. Разложите функцию $f(x) = 3 - |x|$ заданную на интервале $(-5, 5)$ в тригонометрический ряд Фурье. Указать значения суммы ряда в точках разрыва и на концах интервала. Изобразите разлагаемую функцию.



Приложение 2

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ (ИДЗ)

Задания по теме «Определенный интеграл»

ВАРИАНТ 1

Вычислите определенные интегралы

$$1. \int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx .$$

$$2. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx .$$

$$3. \int_{\frac{\pi}{2}}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)} .$$

$$4. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x} .$$

$$5. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx .$$

$$6. \int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx .$$

$$7. \int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx .$$

Вычислите площадь области, ограниченной указанными линиями:

$$8. y = (x - 2)^2, y = 4x - 8.$$

$$10. r = 4 \cos 3\varphi, r = 2 (r \geq 2).$$

$$9. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t \end{cases}, x = 2 (x \geq 2)$$

Вычислите длину дуги кривой

$$11. y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15} .$$

$$12. \begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$13. r = 3e^{3\varphi/4}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями

$$14. x^2/9 + y^2 = 1, z = y, z = 0 (y \geq 0).$$

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX плоской области, ограниченной линиями

$$15. y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$16. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + x + 1} .$$

$$17. \int_0^3 \frac{dx}{x^3 - 5x^2} .$$



ВАРИАНТ 2

Вычислите определенные интегралы

1. $\int_{-2}^0 \cos 3x (x^2 - 4) dx.$

2. $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 1} dx.$

3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 + \cos x} dx.$

4. $\int_{\arccos \frac{4}{\sqrt{17}}}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$

5. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$

6. $\int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx.$

7. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} x^2 dx.$

Вычислите площадь области, ограниченной указанными линиями:

8. $y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0, 1 \leq x \leq 2.$

9. $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 2 (y \geq 2).$

10. $r = \cos 2\varphi.$

Вычислите длину дуги кривой

11. $y = x^2/4 - \ln(x)/2, 1 \leq x \leq 2.$

12. $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi.$

13. $r = 2e^{4\varphi/3}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями

14. $z = x^2 + 4y^2, z = 2.$

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX плоской области, ограниченной линиями

15. $2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0.$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

16. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x + x^2} dx.$

17. $\int_3^6 \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx.$

Задания по теме «производные функции нескольких переменных»

ВАРИАНТ 1

1. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^3 + y^3 + 3xy$

2. Найти уравнение касательной плоскости N и нормали n к поверхности S_2 , заданной уравнением: $z = f(x; y)$ (п.1.) в точке $M_0(1; 1; 5)$.

3. Найти производную от функции $U = x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1$ в направлении вектора $\vec{l} = \{1; 2; 2\}$; в точке $P_0(1; -1; 1)$



4. Показать, что функция $z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$ удовлетворяет тождеству:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
5. Найти $\frac{dz}{dt}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$, если $z = \sin^3(\sqrt{xy} + t^3)$, $x = \cos(1 + t^2)$, $y = \sin(1 - t^2)$
6. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, если $z = e^{\sqrt{u^2+v^2}}$, $u = \operatorname{tg}^3(xy)$, $v = \operatorname{ctg}^3(xy)$
7. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, если функция задана неявно: $xyz + x^2y^2z^2 + e^{x+y+z} - 1 = 0$
8. Разложить по формуле Тейлора функцию $z = x^3y^3 + x^2y + y^2x + x^4 + y^4$; в точке $M_0(1;1)$ при $n=3$
9. Вычислить приближенно с помощью формулы Тейлора функцию $z=f(x;y)$ (см. задание 9) точке $C(1.25;1.45)$ с точностью до 0.001.

Задания по теме «Дифференциальные уравнения»

ВАРИАНТ 1

Проинтегрировать уравнения

1. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$;
2. $y' \sin^2 x = y \ln y$;
3. $(x + 2y)dx = xdy$;
4. $x^2dy - (2xy - y^2)dx = 0$;
5. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;
6. $(xy' - 1) \ln x = 2y$;
7. $xy' - 3y = -x^4y^2$;
8. $(4x^3e^y + y^4e^x)dx + (x^4e^y + 4y^3e^x)dy = 0$
9. $(\cos y \cdot \sin x + 1)dx + (\sin y \cdot \cos x - 1)dy = 0$;
10. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$, $y(0) = 1$;
10. $(y')^2 - y'(e^{x+y} + x^2y) + e^{x+y}x^2y = 0$;
11. $(y')^3 - y + x = 0$;
12. $x^3y'' + x^2y' = 1$;
13. $y'(1 + (y')^2) = y''$;
15. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$;
16. $y''' - y'' + y' - y = x + 5$;
17. $y'' - y' + 2y = e^x(x^2 - 1)$;



18. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$;

19. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{e^x + 2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

20. Указать структуру общего решения уравнения
 $y'' - 8y' + 16y = 12x^2 - 28x + e^{4x}$.

Решить системы уравнений

21. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases}$;

22. $\begin{cases} y_1' = y_2 + x^2 & y_1(0) = 1, \\ y_2' = y_1 - x^2 & y_2(0) = 0 \end{cases}$

23. Составить дифференциальное уравнение всех парабол с осью, параллельной оси Oy и проходящих через начало координат.

24. Найти закон изменения силы тока I с течением времени в цепи с сопротивлением R , самоиндукцией L , если электродвижущая сила $E = E_0 \sin \omega t$.

ВАРИАНТ 2

Проинтегрировать уравнения

1. $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$;

2. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \cos^{-2} y dy = 0$

3. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

4. $y^2 + x^2 y' = xy y'$

5. $x^2 y' = 2xy + 3$;

6. $x^2 y' + 2xy = \ln x$;

7. $xy' + y = 2y^2 \ln x$;

8. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 \right) dx - \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$;

9. $x(y^2 - 3)dx + (x^2 y - 2\sqrt{y})dy = 0$;

10. $y' \cos x = (y + 1) \sin x$, $y(0) = -1$;

11. $(y')^4 - 3(y')^3 + 7y' - 6 = 0$;

12. $y = xy' + y' - (y')^2$;



13. $(y + 1) \cdot (y + 2)y'' = (y')^2$;

14. $xy''' - y'' - x + 1 = 0$;

15. $y'' - 8y' + 17y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

16. $y'''' + 18y'' + 81y = 2x + 1$;

17. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$;

18. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$;

19. $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\pi$;

20. Указать структуру общего решения уравнения

$$y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x;$$

Решить системы уравнений

21.
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 \\ y_2' = y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} y_1' = -4y_2 + \sin x & y_1(0) = 0, \\ y_2' = y_1 + \cos x & y_2(0) = 1 \end{cases}$$

23. Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса $R = 1$, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

24. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/сек входит в достаточно толстую стену. Сопротивление стены сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости с коэффициентом пропорциональности $k = 7$. Найти скорость пули через 0,001 сек. после вхождения в стену.



Приложение 3

ЗАДАНИЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

Билеты к экзамену за второй семестр