Рабочая программа учебной дисциплины **Ф ТПУ 7.1- 21/01**

Федеральное агентство по образованию
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:
Декан факультета АВТ
С.А. Гайворонский

____
«___»____________________

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая программа для интегрированных образовательных программ
«Автоматизация и управление» и
«Информатика и вычислительная техника»

Факультет **автоматики и вычислительной техники (АВТФ)**
Обеспечивающая кафедра **Высшая математика**

Курс I
Семестр I
Учебный план набора 2005 года с изменениями ________________года

Распределение учебного времени

Лекции	45 часов (ауд.)
Практические (семинарские) занятия	45 часов (ауд.)
Всего аудиторных занятий	**90 часов**
Самостоятельная (внеаудиторная) работа	90 часов
Общая трудоемкость	**180 часов**

Зачет в I семестре
Экзамен в I семестре

2005

Предисловие

1. Рабочая программа составлена на основе ГОС ВПО по направлению
552800 – информатика и вычислительная техника
(код и наименование)
654700 – информационные системы
(код и наименование)
550200 – автоматизация и управление
(код и наименование)
657900 – автоматизированные технологии и производства
(код и наименование)
утвержденного Госкомвузом РФ в 2000 г. а также образовательного стандарта ТПУ, утвержденного УМУ ТПУ в 2001 году
(обозначение или наименование другого документа университетского уровня по направлению, специальности, специализации)

РАССМОТРЕНА и ОДОБРЕНА на заседании обеспечивающей кафедры высшей математики протокол № __________
(наименование кафедры) (дата)

2 Разработчик

доцент	ВМ	___________	Э.Н. Подскребко
(должность)	(кафедра)	(подпись)	(И.О.Фамилия)
доцент	ВМ	___________	О.Н. Имас
(должность)	(кафедра)	(подпись)	(И.О.Фамилия)
доцент	ВМ	___________	Е.И. Подберезина
(должность)	(кафедра)	(подпись)	(И.О.Фамилия)

3 Зав. обеспечивающей кафедрой ВМ ___________ К.П. Арефьев
(подпись) (И.О.Фамилия)

4 Рабочая программа СОГЛАСОВАНА с факультетом, выпускающими кафедрами специальности; СООТВЕТСТВУЕТ действующему учебному плану.

Зав. выпускающих кафедр

каф. ИКСУ	_____________	А.М. Малышенко
каф. АиКС	_____________	Г.П. Цапко
каф. ВТ	_____________	Н.Г. Марков
каф. ИПС	_____________	В.К. Погребной
каф. ОСУ	_____________	В.А.Силич

Аннотация.

Рабочая программа учебной дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» предназначена для студентов первого курса факультета автоматики и вычислительной техники (АВТФ) по направлениям 552800 – информатика и вычислительная техника, 654700 – информационные системы, 550200 - автоматизация и управление и 657900 – автоматизированные технологии и производства. Программа составлена на основе государственного образовательного стандарта направлений 550200, 552800, 654700 и 657900 и профессиональной образовательной программы ТПУ по этим направлениям. Структура, содержание и оформление программы соответствуют стандарту ТПУ.

В курсе линейной алгебры и аналитической геометрии изучаются следующие разделы: основы линейной алгебры (системы линейных уравнений, основные понятия теории линейных пространств и операторов); векторная алгебра; аналитическая геометрия (геометрия прямых и плоскостей, геометрия кривых и поверхностей второго порядка).

Разработчики программы: Подскребко Э.Н., кафедра ВМ ЕНМФ
Имас О.Н. кафедра ВМ ЕНМФ
Подберезина Е.И. кафедра ВМ ЕНМФ

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цели дисциплины

Целью преподавания дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» является:

- овладение логическими основами курса, необходимых для решения теоретических и практических задач;
- воспитание отношения к дисциплине как к необходимому инструменту в будущей профессиональной деятельности;
- развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

1.2. Целевые установки дисциплины

Изучающий курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» должен

- иметь представление
    - ♦ о месте и роли математики в современном мире;
    - ♦ о математическом мышлении, принципах математических рассуждений и математических доказательств;
    - ♦ о приложениях изучаемого материала в других разделах математики;
- знать и понимать
    - ♦ взаимосвязь разделов курса.

1.3. Задачи изложения и изучения дисциплины

Изучающий курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» должен

- знать и уметь использовать:
    - ♦ основы алгебры матриц и теории определителей;
    - ♦ методы решений систем линейных уравнений;
    - ♦ методы векторной алгебры;
    - ♦ основы теории линейных пространств и линейных операторов;
    - ♦ свойства и уравнения основных геометрических образов;
- иметь опыт:
    - ♦ употребления математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов;
    - ♦ исследования, аналитического и численного решения задач линейной алгебры и аналитической геометрии.

Общий объем занятий по семестрам

Таблица 1

семестр	Название дисциплины	Лекции	практ. занятия	самост. работа	Всего часов	Форма отчетности
1	Линейная алгебра и аналит. геометрия	45	45	90	180	Зачет Экзамен

Весь курс разбит на четыре раздела, названия которых указаны в таблице 2.

Основные разделы курса «Аналитическая геометрия и линейная алгебра»

Таблица 2

	название	число часов			
		лекций	практ. занятий	сам. работа	всего
1	Элементы линейной алгебры	10	14	24	48
2	Векторная алгебра.	6	8	16	30
	Элементы теории линейных пространств и линейных операторов.	12	10	20	42
3	Аналитическая геометрия	16	14	30	60
	Всего за семестр	**44**	**46**	90	180

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел I
Элементы линейной алгебры (10 часов)

Матрицы. Матрицы частного вида. Определители второго, третьего, $n-$порядка. Свойства определителей. Миноры, алгебраические дополнения. Вычисление определителей.

Линейные операции над матрицами и их свойства. Умножение матриц. Обратная матрица. Элементарные преобразования матриц. Решение матричных уравнений.

Линейная зависимость и линейная независимость матриц. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований.

Системы линейных уравнений. Основные понятия и определения. Критерий совместности. Матричный способ решения. Метод Крамера.

Метод Гаусса решения произвольной системы линейных уравнений. Однородные системы. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

Раздел II
Векторная алгебра (6 часов)

Точечно-векторное евклидово пространство. Множество свободных векторов как пример трехмерного точечно-векторного евклидова пространства. Декартова система координат. Проекция вектора на ось и геометрический смысл координат вектора в декартовом базисе.

Простейшие задачи векторной алгебры (нахождение координат вектора, длина вектора, направляющие косинусы вектора и орт вектора, деление отрезка в заданном отношении).

Векторное и смешенное произведения векторов.

Раздел II
Элементы теории линейных пространств
и линейных операторов (12 часов)

Аксиоматическое определение линейного пространства. Теоремы, вытекающие из определения линейного пространства. Примеры конкретных линейных пространств. n-мерное арифметическое пространство. Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность и базис линейного пространства. Координаты вектора. Две задачи о линейной зависимости и линейной независимости векторов. Преобразование базиса. Преобразование координат вектора при преобразовании базиса.

Линейные подпространства. Сумма и пересечение линейных подпространств.

Скалярное произведение, его свойства. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Основные метрические понятия: длина вектора, угол между векторами. Ортонормированный базис и его свойства.

Понятие функции в линейных пространствах. Линейные операторы. Линейные операторы конечномерных пространств: матрица линейного оператора, связь матриц оператора в разных базисах, собственные векторы и диагонализируемость линейного оператора. Действия над линейными операторами и соответствующими матрицами.

Линейные операторы в евклидовом пространстве. Сопряженный и самосопряженный линейный оператор, их свойства.

Раздел IV

Аналитическая геометрия (16 часов)

Понятие линий и поверхностей. Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Плоскость в пространстве. Различные виды уравнений плоскостей. Взаимное расположение плоскостей.

Прямая в пространстве. Приведение общего уравнения прямой в пространстве к каноническому виду. Взаимное расположение прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола; их геометрические свойства, уравнения и построение.

Полярная система координат. Уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат.

Поверхности второго порядка: сфера, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, конус, цилиндрические поверхности; их канонические уравнения и геометрические свойства.

Построение поверхностей вращения.

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Цель практического занятия – научить применять теоретические сведения к решению конкретных задач. Для этого необходимо достаточно глубокое и всестороннее обсуждение теоретических понятий и положений; решение типовых задач с подробными комментариями и разъяснениями у доски, решение аналогичных задач на формирование умений и навыков, самостоятельное решение с целью закрепления нового материала.

Темы практических занятий распределены по частям следующим образом.

Раздел I

Элементы линейной алгебры (14 часов)

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определители. Вычисление определителей порядка n.
3. Обратная матрица.
4. Системы линейных уравнений. Матричный способ решения. Метод Крамера.
5. Исследование систем линейных уравнений на совместность. Метод Гаусса.
6. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.
7. Контрольная работа.

Раздел II
Векторная алгебра (8 часов)

8. Простейшие задачи векторной алгебры. Линейные операции на множестве векторов.
9. Скалярное произведение векторов.
10. Векторное и смешанное произведения векторов.
11. Контрольная работа.

Раздел III
Векторная алгебра. Элементы теории линейных пространств и линейных операторов (10 часов)

12. Линейные пространства и подпространства. Свободные векторы и линейные операции над векторами. Евклидово пространство. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и размерность линейного пространства.
13. Евклидово пространство, ортогонализация базиса.
14. Линейный оператор. Матрица линейного оператора и ее преобразование при переходе к новому базису.
15. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Диагонализация линейного оператора.
16. Контрольная работа.

Раздел IV
Аналитическая геометрия (14 часов)

17. Прямая на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.
18. Плоскость в пространстве.

19. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.
20. Кривые второго порядка: приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду, построение кривых.
21. Поверхности второго порядка. Построение поверхностей вращения.
22. Контрольная работа.
23. Зачет.

4. ПРОГРАММА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

	Виды самостоятельной работы	объем в час.	объем в %
1.	Проработка лекций	9	10
2.	Работа с математической литературой	9	10
3.	Выполнение ИДЗ (линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия)	36	40
4.	Подготовка к зачету	36	40
	Всего	90	100

5. ТЕКУЩИЙ И ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

Текущий и итоговый контроль по дисциплине осуществляется на основании рейтинг-листа дисциплины, в котором в соответствии с учебным планом и календарным планом указаны все формы отчетности: индивидуальные задания (ИДЗ), контрольные работы, самостоятельная работа. ИДЗ рассчитано на обязательную и систематическую работу по каждому разделу и проверяются по частям по мере прохождения материала. По всем разделам предусмотрены контрольные работы «летучки» для оценки уровня усвоения теоретического раздела дисциплины.

В конце первого семестра студенты сдают зачет и экзамен по курсу «линейная алгебра и аналитическая геометрия».

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Основная литература

1. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. Элементы линейной алгебра и аналитической геометрии.
2. Беклемишев Д.В. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1971.
3. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 1971.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1974.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1974.
6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Высшая школа, 1974.
7. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. Сборник задач по линейной алгебра и аналитической геометрии.

6.2. Дополнительная литература

1. Арефьев К.П., Ивлев Е.Т., Тарбокова Т.В. Системы линейных уравнений. Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 1996.
2. Арефьев К.П., Ивлев Е.Т., Тарбокова Т.В. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 1996.
3. Арефьев К.П., Нагорнова А.И., Столярова Г.П., Харлова А.Н. Высшая математика. Ч.I: Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 1999.
4. Арефьев К.П., Нагорнова А.И., Столярова Г.П., Харлова А.Н. Высшая математика. Ч.I: Руководство к решению задач. Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 2000.
5. Арефьев К.П., Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Пилипенко В.А. Элементы многомерной аналитической геометрии. Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 1999.
6. Кан Е.Х. Расчетные задания по теме «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». - Томск: Ротапринт ТПИ, 1981.
7. Дячук Р.П. Методические указания и контрольные задания по теме «Векторная алгебра». - Томск.: Ротапринт ТПИ, 1989.
8. Барышева В.К., Пахомова Е.Г. Руководство к решению задач по аналитической геометрии (внутрикафедральное издание).

Приложение 1

ЗАДАНИЯ РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ

Контрольная работа по теме «Основы линейной алгебры»

ВАРИАНТ 1

1. Найти произведение матриц: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 0\\ 3 & 5 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -4\\ 2 & -5\end{pmatrix}$.

2. Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases}3x + 2y - z = 1\\ x + y - z = 4\\ 2x - y + 3z = -2\end{cases}$$

3. Доказать, что система имеет единственное решение и найти неизвестное x_1 по формулам Крамера:

$$\begin{cases}2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 4\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1\\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2\end{cases}$$

4. Доказать, что система имеет нетривиальные решения и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases}-3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0\\ -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0\\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 0\\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0\end{cases}$$

ВАРИАНТ 2

1. Найти произведение матриц: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -5 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

2. Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases}3x + 2y + z = 5\\ -x - y + 2z = 1\\ 4x + 3y + z = 6\end{cases}$$

3. Доказать, что система имеет единственное решение и найти неизвестное x_2 по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

4. Доказать, что система имеет нетривиальные решения и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 3

1. Найти произведение матриц: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 3z = -2 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

3. Доказать, что система имеет единственное решение и найти неизвестное x_3 по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 3 \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

4. Доказать, что система имеет нетривиальные решения и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 4

1. Найти произведение матриц: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2 & 3\\ 3 & 3 & -5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

2. Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases}3x - 4y + 2z = 1\\ 4x - 2y + z = 3\\ 5x - y + 3z = 2\end{cases}$$

3. Доказать, что система имеет единственное решение и найти неизвестное x_4 по формулам Крамера:

$$\begin{cases}2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 8\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1\\ x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 2\end{cases}$$

4. Доказать, что система имеет нетривиальные решения и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases}2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0\\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0\\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0\\ - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\end{cases}$$

Контрольная работа по теме «Векторная алгебра.»

Вариант 1

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}}=\{0;1;2\}$, $\overline{\mathbf{q}}=\{1;0;1\}$, $\overline{\mathbf{r}}=\{-1;2;4\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}}=\{-2;4;7\}$ в этом базисе.
2. Найти координаты точек A и B, если известно, что точки $C(-15;12)$ и $D(-12;10)$ делят отрезок AB на три равные части.
3. Вершины пирамиды $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(-4;2;2),\ B(2;-1;-1),\ C(2;0;-2),\ D(0;-3;0).$$

Найти: 1) Угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{BD}$ (в градусах).
2) Высоту треугольника BCD, опущенную из вершины C.
3) Объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 2

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}} = \{1;3;0\}$, $\overline{\mathbf{q}} = \{2;-1;1\}$, $\overline{\mathbf{r}} = \{0;-1;2\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}} = \{6;12;-1\}$ в этом базисе.
2. Найти координаты точек A и B, если известно, что точки $C(-2;-8)$ и $D(2;0)$ делят отрезок AB в отношении 3 : 2 : 1.
3. Вершины пирамиды $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(-3;3;3),\ B(3;0;0),\ C(3;1;-1),\ D(1;-2;1).$$

Найти: 1) $\text{Пр}_{\overline{\text{BD}}}\overline{CB}$.

2) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.

3) Высоту пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины A.

Вариант 3

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}} = \{2;1;-1\}$, $\overline{\mathbf{q}} = \{0;3;2\}$, $\overline{\mathbf{r}} = \{1;-1;1\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}} = \{-1;4;6\}$ в этом базисе.
2. Найти координаты точек A и B, если известно, что точки $C(10;7)$ и $D(4;3)$ делят отрезок AB в отношении 2 : 2 : 1.
3. Вершины пирамиды $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(-2;4;4),\ B(4;1;1),\ C(4;2;0),\ D(2;-1;2).$$

Найти: 1) Угол между векторами $\overline{BD}$ и $\overline{CB}$ (в градусах).

2) Площадь параллелограмма, построенного на $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$.

3) Объем пирамиды, построенной на $\overline{AB}$, $2\overline{BC}$ и $\overline{CD}$.

Вариант 4

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}} = \{4;1;1\}$, $\overline{\mathbf{q}} = \{2;0;-3\}$, $\overline{\mathbf{r}} = \{-1;2;1\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}} = \{-9;5;5\}$ в этом базисе.
2. Найти координаты точек A и B, если известно, что точки $C(-6;21)$ и $D(-2;11)$ делят отрезок AB в отношении 1 : 2 : 1.
3. Вершины пирамиды $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(-1;5;5),\ B(5;2;2),\ C(5;3;1),\ D(3;0;3).$$

Найти: 1) $\text{Пр}_{\overline{\text{AB}}}\overline{BC}$.

2) Площадь параллелограмма, построенного на $2\overline{BC}$ и $\overline{DC}$.

3) Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{BC}$, $1/3\overline{AB}$ и $0{,}5\overline{DB}$.

Контрольная работа по теме «Элементы теории линейных пространств и линейных операторов».

Вариант 1

1. Относительно базиса $e_1 = \{1,0,0\}, e_2 = \{0,1,0\}, e_3 = \{0,0,1\}$ даны четыре вектора: $f_1 = \{3,2,-4\},\ f_2 = \{4,1,-2\},\ f_3 = \{5,2,-3\},\ \ x = \{9,5,-8\}$.

   а) Доказать, что f_1, f_2, f_3 можно принять за новый базис.

   б) Записать матрицу перехода от базиса e_i к базису f_i, и наоборот, от базиса f_i к базису e_i. Сделать проверку.

   в) Найти координаты вектора x в базисе f_i.
2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов: $\mathrm{e}^{\mathbf{x}},\ \mathbf{x}\mathrm{e}^{\mathbf{x}},\ \mathbf{x}^2\mathrm{e}^{\mathbf{x}}$ на $(-\infty,\ +\infty)$.
3. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$: $\varphi\mathbf{x} = (4x_1 - 5x_2 + 2x_3,\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3,\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3)$.

   а) Найти матрицу оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

   б) Определить, является ли оператор диагонализируемым. Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

Вариант 2

1. Относительно базиса $e_1 = \{1,0,0\}, e_2 = \{0,1,0\}, e_3 = \{0,0,1\}$ даны четыре вектора: $f_1 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ f_2 = \{0,1,0\},\ f_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \ x = \{-\sqrt{2}, -2, \sqrt{2}\}$.

   а) Доказать, что f_1, f_2, f_3 образуют ортонормированный новый базис.

   б) Записать матрицу перехода от базиса e_i к базису f_i, и наоборот, от базиса f_i к базису e_i.

   в) Найти координаты вектора x в базисе f_i.
2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов: $1,\ x,\ x^2$ на $(-\infty,\ +\infty)$.
3. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$: $\varphi\mathbf{x} = (4x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ \ 2x_2 + 2x_3,\ \ x_2 + x_3)$.

   а) Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

   б) Определить, является ли оператор диагонализируемым. Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

Вариант 3

1. а) Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе $x_1 = \{2,-1,3,4\}$, $x_2 = \{1,5,1,3\}$, $x_3 = \{-1,0,2,5\}$, $x_4 = \{0,-6,4,6\}$, $x_5 = \{1,6,-2,1\}$.

   б) На основании полученных линейно независимых векторов построить новый ортонормированный базис.

   в) Выбрать их в качестве базисных e_1, e_2, e_3, e_4 и записать матрицу перехода от базиса e_i к базису e_2, e_3, e_1, e_4.

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

   $1,\ \sin x,\ \cos x$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

3. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$: $\varphi\mathbf{x} = (4x_1 + 5x_2 - 7x_3,\ -2x_2 + 4x_3,\ 3x_2 + 2x_3)$.

   а) Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

   б) Определить, является ли оператор диагонализируемым. Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

Вариант 4

1. а) Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе $x_1 = \{-1,2,0,7\}$, $x_2 = \{1,3,-1,0\}$, $x_3 = \{4,1,2,5\}$, $x_4 = \{4,6,1,12\}$, $x_5 = \{7,14,2,31\}$.

   б) На основании полученных линейно независимых векторов построить новый ортонормированный базис.

   в) Выбрать их в качестве базисных e_1, e_2, e_3 и записать матрицу перехода от базиса e_i к базису e_2, e_3, e_1.

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

   $1,\ x,\ e^x$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

3. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$: $\varphi\mathbf{x} = (2x_1 + 3x_3,\ 10x_1 - 3x_2 - 6x_3,\ -x_1 - 2x_3)$.

   а) Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

   б) Определить, является ли оператор диагонализируемым. Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

Контрольная работа по теме «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 1

1. Составить уравнение прямой, перпендикулярной $5x-5y-6=0$ и проходящей через точку пересечения прямых $2x-5y-7=0$ и $3x+7y+4=0$.
2. Записать уравнение прямой проходящей через точки $A(-3;2)$ и $B(-2;-5)$ и найти расстояние от точки $C(4;3)$ до этой прямой.
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные (доказать) прямые
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2} \text{ и } \begin{cases} y+z-2=0 \\ 2x-3y-7=0 \end{cases}.$$
4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4;-1;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=\{-1;2;-2\}$. Найти острый угол, который эта плоскость образует с плоскостью $x+z-6=0$.
5. Прямая проходит через точку $M_0(3,7,2)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{5;8;1\}$. Записать уравнение прямой и указать, при каком значении C прямая будет параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$.
6. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-4;3;-3)$ и $M_2(2;-6;9)$. Доказать, что она пересекается с прямой $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$. Найти точку пересечения и угол между ними.

Построить кривые

7. $x^2+9y^2-2x-54y+73=0$
8. $x^2-2x+4y+5=0$

ВАРИАНТ 2

1. Найти проекцию точки P(-6,4) на прямую, проходящую через две точки $M_1(3,3)$ и $M_2(8,7)$.
2. Записать уравнение прямой, отсекающей на оси Ox отрезок a = 2 и составляющей с осью Ox угол $120°$. Найти тупой угол, который эта прямая образует с прямой $y=\frac{x}{\sqrt{3}}+1$.
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся (доказать) прямые

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=3t+7 \\ y=2t+2 \\ z=-2t+1 \end{cases}.$$

4. Найти расстояние от точки $P(5;-3;3)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(4;3;-1)$, $M_2(2;0;-3)$ и $M_3(-2;1;0)$.
5. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(12;9;1)$ и $M_2(4;3;-1)$. Доказать, что она перпендикулярна плоскости $4x+3y+z-2=0$.
6. Доказать, что прямые $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-2 \\ z=-6t+1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$ скрещиваются. Найти расстояние между ними

Построить кривые

7. $9x^2-4y^2+18x+8y-31=0$
8. $y^2+6y-2x+3=0$

ВАРИАНТ 3

1. Точки *A*(3,2), *B*(5,-2) и *C*(1,0) являются вершинами треугольника. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины *C* на медиану, проведенную из вершины *A*.
2. Найти площадь квадрата, две стороны которого лежат на прямых $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$.
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через линию пресечения плоскостей $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$ параллельно оси Oy.
4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;-1)$, $M_2(-1;-12;2)$ и $M_3(2;-1;1)$. Найти угол, который эта плоскость образует с плоскостью $x+9y-3z+2=0$.
5. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(7;4;5)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{5;1;4\}$. Доказать, что она пересекается с плоскостью $3x-y+2z-5=0$. Найти их точку пересечения и угол между ними.
6. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-7;5;9)$ и $M_2(-1;3;17)$. Доказать, что она параллельна прямой $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ и найти расстояние между ними.

Построить кривые

7. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

8. $x^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

ВАРИАНТ 4

1. Даны вершины треугольника *A*(1,2), *B*(-3,-2), *C*(3,-2). Найти точку пересечения биссектрисы, проведенной из вершины *B*, и медианы, проведенной из вершины *A*.
2. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1;1)$ под углом $45°$ к прямой $2x + 3y - 6 = 0$.
3. Найти точку Q, симметричную точке $P(3;-4;-6)$ относительно плоскости $x - y - 4z - 13 = 0$.
4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$, $M_3(10;-7;1)$ Доказать, что она будет параллельна плоскости $x - y - 4z - 7 = 0$ и найти расстояние между ними.
5. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1;-3)$ параллельно вектору $\bar{l} = \{3;-4;4\}$ и доказать, что она лежит в плоскости $4x - 3y - 6z - 7 = 0$.
6. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;0;-2)$ и $B(-4;2;-3)$ и доказать, что она скрещивается с прямой $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$. Найти угол между ними.

Построить кривые

7. $x^2 - 9y^2 - 36y - 72 = 0$

8. $y^2 + 2x + 6y + 11 = 0$

Приложение 2

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ (ИДЗ)

Задания по теме «Основы линейной алгебры»

1. Дан определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

   а) Вычислить определитель, разложив его по элементам второй строки.

   б) Составить определитель Δ, заменив второй столбец определителя D линейной комбинацией 1-го и 3-го столбцов с коэффициентами $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Может ли $D = \Delta$?

   в) Вычислить определитель D, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце.

   г) Непосредственным вычислением убедиться, что определитель изменит знак, если поменять местами какие-либо две строки или столбца.

2. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_3 + x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

   а) Доказать, что эта система имеет единственное решение.

   б) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера.

   в) Остальные неизвестные найти методом исключений неизвестных (методом Гаусса).

3. а) Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

   б) Доказать, что система уравнений $\begin{cases} -2x_1 + x_3 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

   имеет единственное решение и найти его матричным методом.

5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

а) Доказать, что эта система совместна.
б) Найти ее общее решение.
в) Найти какое-либо ее частное решение.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 14x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

а) Доказать, что эта система имеет ненулевые решения.
б) Найти ее общее решение.
в) Найти фундаментальную систему решений.

Задания по теме «Векторная алгебра»

1. Найти длину вектора $\bar{\mathbf{a}} = 3\bar{\mathbf{e}}_1 - 2\bar{\mathbf{e}}_2$, где $|\bar{\mathbf{e}}_1| = 1$, а $|\bar{\mathbf{e}}_2| = 2$ и векторы $\bar{\mathbf{e}}_1$ и $\bar{\mathbf{e}}_2$ образуют угол 30^0.
2. В плоскости *XOY* найти единичный вектор $\bar{\mathbf{s}}$, перпендикулярный вектору $\bar{\mathbf{a}} = \{2,1,-1\}$ и образующий острый угол с осью *Ox*.
3. Дан треугольник с вершинами в точках *A*(1,-1,2), *B*(2,1,-1), *C*(-1,1,3). Найти его площадь и высоту, опущенную из вершины *B*.
4. Проверить, лежат ли четыре точки в одной плоскости: *A*(1,-1,2), *B*(3,4,5), *C*(2,-1,1), *D*(2,1,3).

Задания по теме «Элементы теории линейных пространств и линейных операторов»

1. Доказать, что векторы $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1,2,-1\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{2,1,1\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{1,2,3\}$ образуют базис, и найти разложение в этом базисе вектора $\bar{\mathbf{a}} = \{-1,3,2\}$.
2. Относительно базиса $\bar{e}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{e}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{e}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{x}$: $\bar{a}_1 = \{1;1;1\}$, $\bar{a}_2 = \{1;1;2\}$, $\bar{a}_3 = \{1;2;3\}$, $\bar{x} = \{6;9;14\}$.

   а) доказать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу A перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ к базису $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ и матрицу B перехода от базиса $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ к базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

3. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задания по теме «Аналитическая геометрия»

1. Найти угловой коэффициент k прямой, проходящей через точки $M_1(1,8)$ и $M_2(-1,4)$; записать уравнение прямой в параметрическом виде.
2. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3,2)$, $B(5,-2)$, $C(1,0)$.
3. Даны вершины треугольника $A(-10,-13)$, $B(-2,3)$, $C(2,1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.
4. Построить плоскости:
   а) $2x+3y+z-1=0$, б) $2x+y-4z=0$,
   в) $4x-3y+6=0$, г) $3y+z=0$.
5. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось Oy и точку $M(1,4,-3)$.
6. Найти уравнение проекции прямой $\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-7}$ на плоскость $2x-y-3z+6=0$.
7. Точка $A(1,-3,0)$ - вершина куба, одна из граней которого лежит на плоскости $3x+2y-6z+17=0$. Вычислить объем куба.
8. Установить, что три плоскости $2x-4y+5z-21=0$, $x-3z+18=0$, $6x+y+z-30=0$ имеют общую точку и вычислить ее координаты.

9. Расстояние между директрисами эллипса в 2 раза больше расстояния между его фокусами. Определить эксцентриситет эллипса. Построить эллипс.

10. Уравнения линий привести к каноническому виду. Построить линии:

    а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, б) $4x^2 + 9y^2 - 18y - 27 = 0$,

    в) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$, г) $y^2 + 6y - 2x + 3 = 0$.

11. Изобразить линии:

    а) $y = \sqrt{1 - x^2}$, б) $y = -\dfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$,

    в) $x = 3 + \sqrt{-6(y-2)}$, г) $\rho = \dfrac{18}{4 - 5\cos\varphi}$.

12. Построить тело, ограниченное поверхностями:

    а) $z - a = -(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 = z^2$

    б) $z = x^2 - y^2$, $z = 0$, $z = 3$.

Приложение 3

ЗАДАНИЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

Экзаменационный билет

По дисциплине «линейная алгебра и аналитическая геометрия»
Факультет АВТ
Курс I

Тема 1. Системы линейных уравнений.

1. Понятие определителя третьего порядка. Сформулировать и доказать свойства определителя, при которых не меняется его значение (на примере определителя третьего порядка).

2. Сформулировать и доказать достаточный признак существования фундаментальных систем линейных однородных алгебраических уравнений.

3. Найти общее решение и какую-либо фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ -2x_1 - 8x_2 - 10x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Тема 2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

4. Сформулируйте определение линейной комбинации векторов.

5. Различные виды уравнений прямой в пространстве (вывод).

6. Найдите расстояние между прямыми

$$\frac{x}{2} = \frac{y-12}{-1} = \frac{z+1}{0} \quad \text{и} \quad \frac{x+5}{7} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

7. Найдите точку, симметричную точке $A(0; -10; 1)$, относительно прямой

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{1}.$$

Тема 3. Элементы линейных пространств.

8. Понятие векторного пространства. Пример.

9. Сформулировать теорему об изоморфизме линейных пространств. Доказать необходимый и достаточный признак изоморфизма.

10. Пусть V – множество многочленов с вещественными коэффициентами, степень которых не выше четырех, а L – его подмножество многочленов вида

$ax^3 + bx + c$ ($a, b, c \in R$). Является ли множество V линейным пространством относительно естественным образом введенных операций сложения и умножения на число, а множество L – его подпространством?

Составил: доцент каф. высшей математики Имас О.Н., Подскребко Э.Н, Подберезина Е.И.

Зав.кафедрой высшей математики профессор _____________ Арефьев К.П.

5.12.2005